29 三角関数 2

248

(i) $\sin\theta=0$ すなわち $\theta=0,\ \pi$ のとき

$2\cos\theta(x-1)=0$，$\cos\theta\neq 0$ より，$x=1$

よって，$\theta=0,\ \pi$ のとき実数解をもつ

(ii) $\sin\theta\neq 0$ すなわち $\theta\neq 0,\ \pi$ のとき

与式は x の 2 次方程式だから，判別式を D とすると，必要十分条件は $D\geq 0$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=\cos^2\theta-\sin\theta(\sin\theta-2\cos\theta)\\&=2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=\sin 2\theta+\cos 2\theta\\&=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

より，

$$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$$

これと $\dfrac{\pi}{4}\leq 2\theta+\dfrac{\pi}{4}<4\pi+\dfrac{\pi}{4}$ （$\theta\neq 0,\ \pi$）より，実数解をもつ θ の値の範囲は，

$$\frac{\pi}{4}\leq 2\theta+\frac{\pi}{4}\leq\pi,\ 2\pi\leq 2\theta+\frac{\pi}{4}\leq 3\pi,\ 4\pi\leq 2\theta+\frac{\pi}{4}<4\pi+\frac{\pi}{4}\ \ (\theta\neq 0,\ \pi)$$

すなわち $0<\theta\leq\dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi\leq\theta<\pi,\ \pi<\theta\leq\dfrac{11}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi\leq\theta<2\pi$

(i)，(ii)より，実数解をもつ θ の値の範囲は，$0\leq\theta\leq\dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi\leq\theta\leq\dfrac{11}{8}\pi,\ \dfrac{15}{8}\pi\leq\theta<2\pi$

249

$$\begin{aligned}4\sin^2 x+2\cos x+a&=4(1-\cos^2 x)+2\cos x+a\\&=-4\cos^2 x+2\cos x+4+a\end{aligned}$$

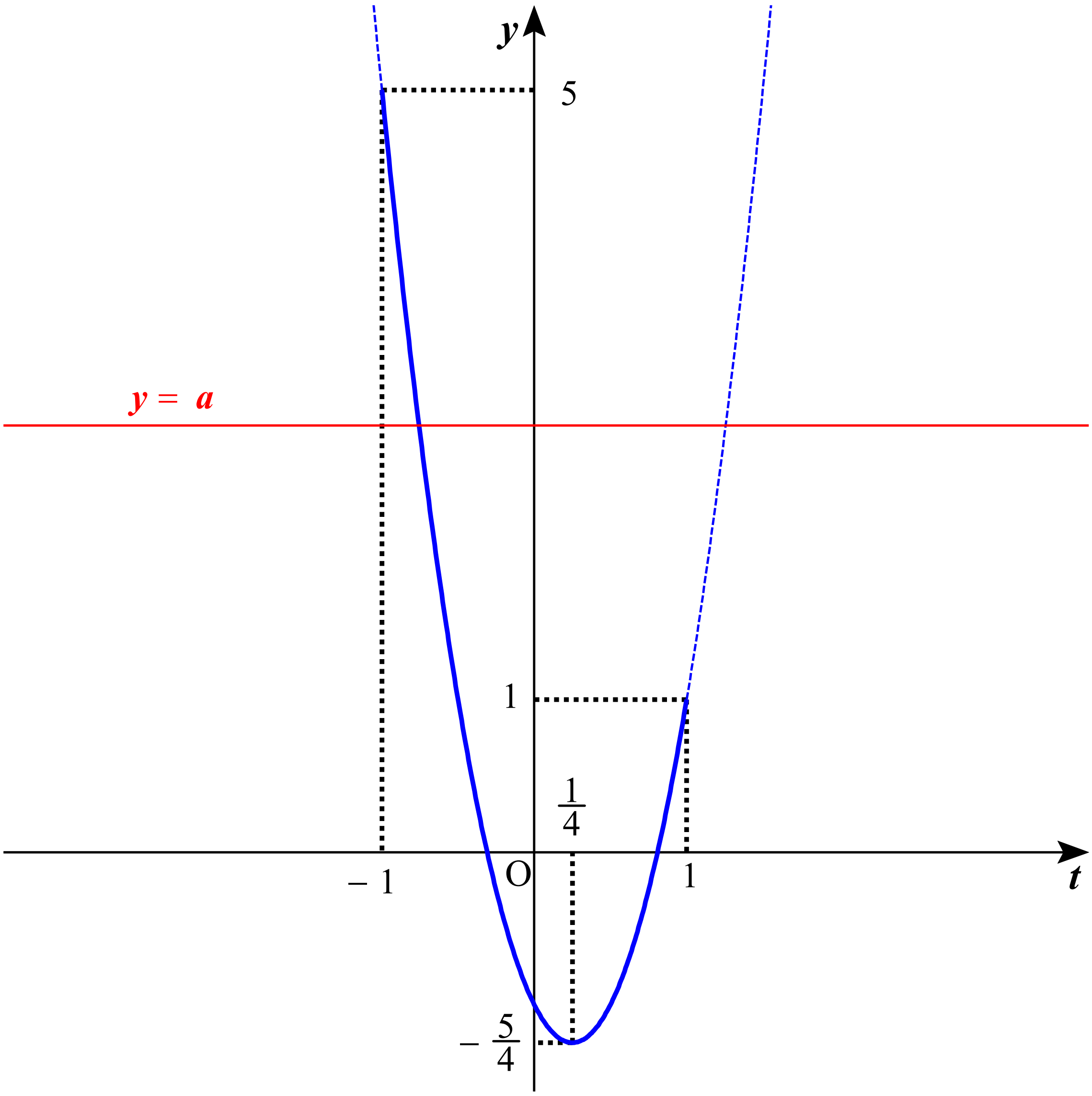
より，

$-4\cos^2 x+2\cos x+4+a=3$ すなわち $a=4\cos^2 x-2\cos x-1$

よって，$\cos x=t$，$f(t)=4t^2-2t-1$（ただし，$-\pi<x\leq\pi$ より，$-1\leq t\leq 1$）とおき，

$y=a$ と $y=f(t)$ の共有点の数から方程式の解の個数を求めることができる。

$f(t)=4\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ （$-1\leq t\leq 1$）より，$y=f(t)$ のグラフは次図青色実線のようになる。

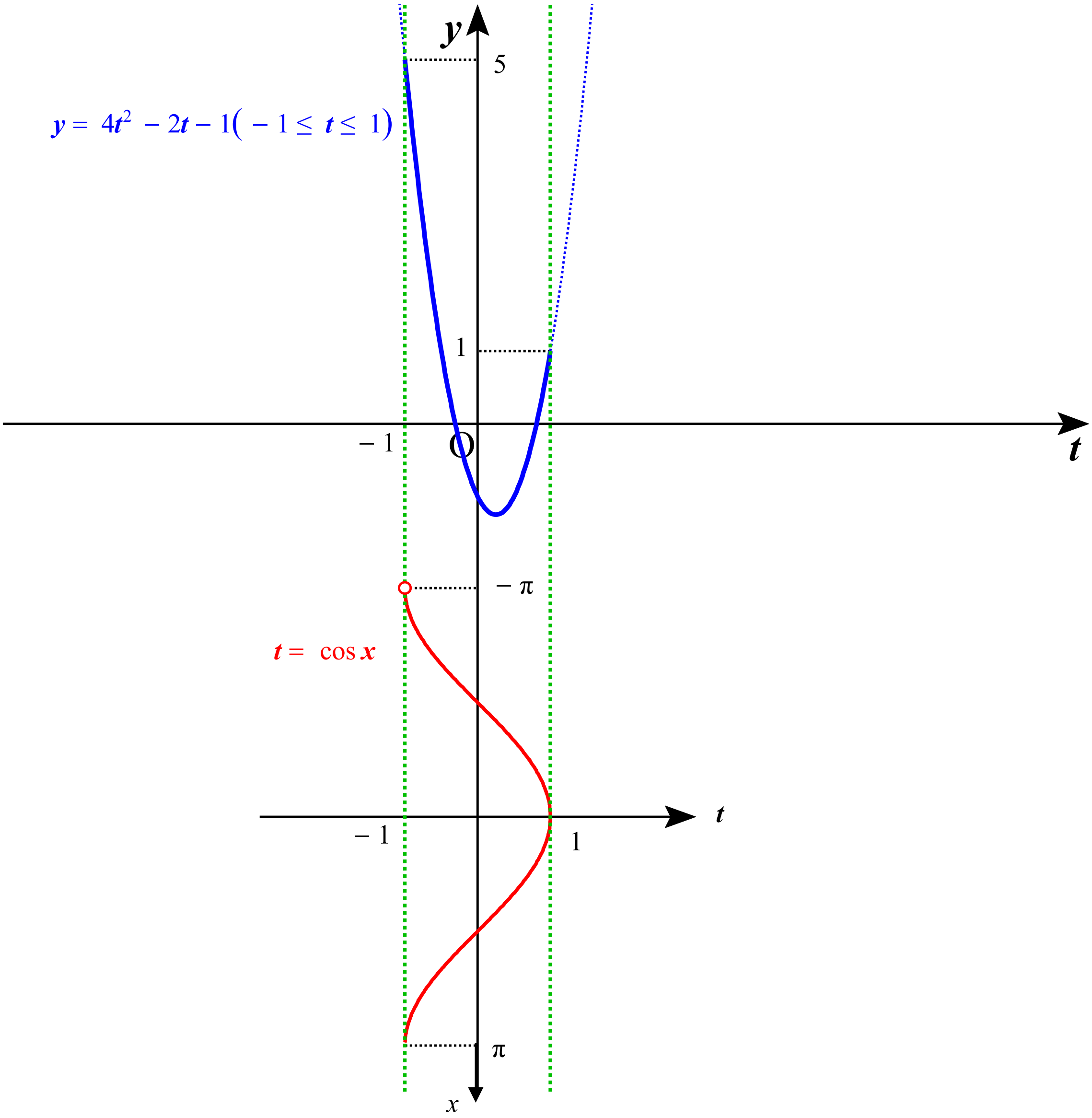


よって，$\cos x = t$ を満たす x の値の数は，t の値が $-1, 1$ のときそれぞれ $\pi, 0$ の 1 つ，$-1 < t < 1$ のとき 2 つ存在することに注意すれば，方程式の解の数は，

$a < -\dfrac{5}{4}$ のとき 0，$a = -\dfrac{5}{4}$ のとき 2，$-\dfrac{5}{4} < a < 1$ のとき 4，$a = 1$ のとき 3，$1 < a < 5$ のとき 2，

$a = 5$ のとき 1，$5 < a$ のとき 0

参考図



250

半径$\sqrt{2}$の円周上の点をP, OPのx軸正方向とのなす角をθ（$0 \leqq \theta < 2\pi$ 反時計回りを正）とすると，$\mathrm{P}\left(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta\right)$

よって，

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x + y &= \sqrt{6}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta \\ &= 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + 2xy + 3y^2 &= 2\cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + 6\sin^2\theta \\ &= 4\sin^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + 2 \\ &= 4\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} + 2\sin 2\theta + 2 \\ &= 2\sin 2\theta - 2\cos 2\theta + 4 \\ &= 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 4\end{aligned}$$

ゆえに，$\sqrt{3}x + y$の最小値は$-2\sqrt{2}$，$x^2 + 2xy + 3y^2$の最大値は$4 + 2\sqrt{2}$

251

(1)

$\cos 3\theta - \cos 2\theta = 2\sin\frac{5}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}$ より，$2\sin\frac{5}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2} = 0$

よって，$\frac{5}{2}\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi$，$\frac{\theta}{2} = 0$　$\therefore \theta = 0,\ \frac{2}{5}\pi,\ \frac{4}{5}\pi$

(2)

$$\begin{aligned}\cos 3\theta - \cos 2\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \left(-1 + 2\cos^2\theta\right) \\ &= 4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 \\ &= (\cos\theta - 1)\left(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1\right)\end{aligned}$$

より，$(\cos\theta - 1)\left(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1\right) = 0$

よって，$\cos\theta = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

(3)

$0 \leqq \theta \leqq \pi$において，$\cos\theta$は単調に減少するから，(1)と(2)の結果より，$\cos\frac{2}{5}\pi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

正五角形の頂点と中心を結んだとき，隣り合う線分のなす角は$\frac{2}{5}\pi$だから，

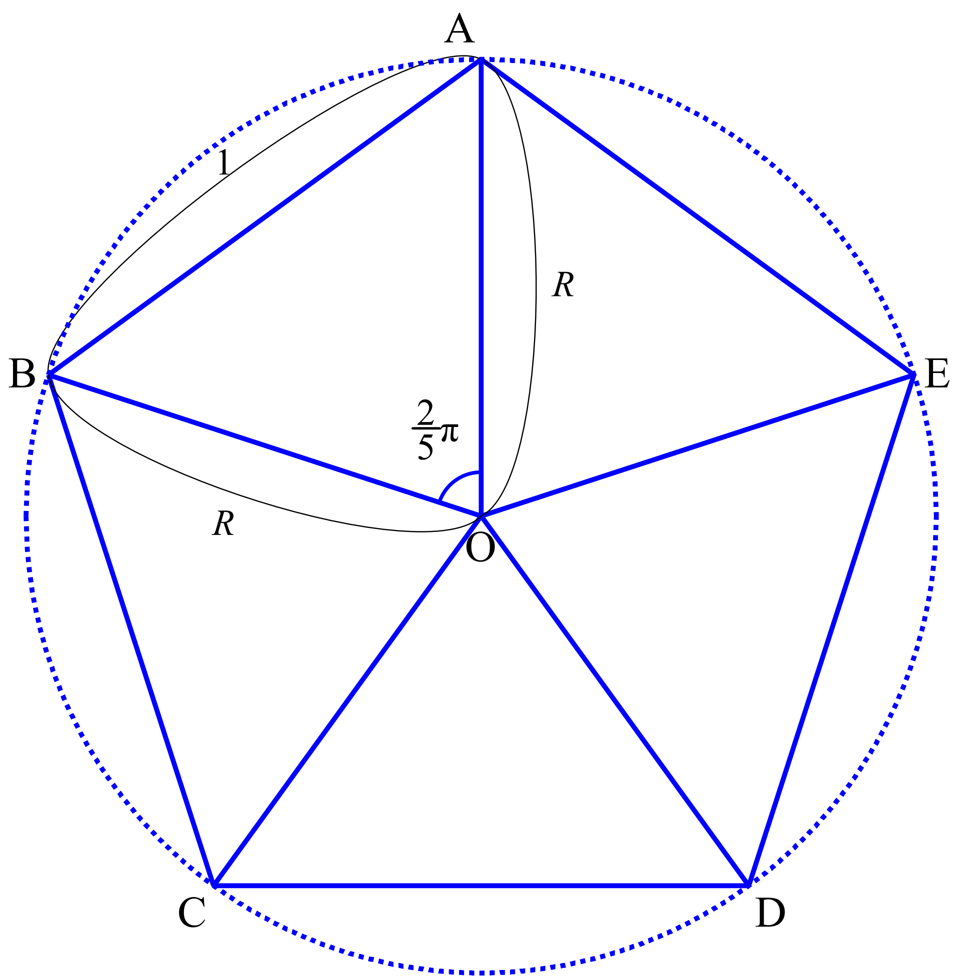
△AOBに余弦定理を適用すると，

$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}$

より，

$$
\begin{aligned}
1^2 &= R^2 + R^2 - 2R \cdot R\cos\frac{2}{5}\pi \\
&= 2R^2\left(1-\cos\frac{2}{5}\pi\right) \\
&= 2R^2\left(1-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) \\
&= R^2 \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
\qquad \angle\mathrm{AOB} = \frac{2}{5}\pi
$$

$$\therefore R^2 = \frac{2}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$



252

$$\sin x+\sin y-(\cos x+\cos y)=\sin x-\cos x+\sin y-\cos y$$
$$=\sqrt{2}\left\{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x-y}{2}$$

より，

$$2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x-y}{2}\geq 0$$

よって，$0\leq x\leq 2\pi,\ 0\leq y\leq 2\pi$ における

連立不等式$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0\\ \cos\dfrac{x-y}{2}\geq 0\end{cases}$　または　連立不等式$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 0\\ \cos\dfrac{x-y}{2}\leq 0\end{cases}$

の解を図示すればよい。

ただし，$0\leq x+y\leq 4\pi,\ -2\pi\leq x-y\leq 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{7}{4}\pi$，$-\pi\leq\dfrac{x-y}{2}\leq\pi$

連立不等式$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0\\ \cos\dfrac{x-y}{2}\geq 0\end{cases}$　の解

$0\leq\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{\pi}{4}\leq\pi$ かつ $-\dfrac{\pi}{2}\leq\dfrac{x-y}{2}\leq\dfrac{\pi}{2}$

すなわち，$-x+\dfrac{\pi}{2}\leq y\leq -x+\dfrac{5}{2}\pi$ かつ $x-\pi\leq y\leq x+\pi$　・・・①

連立不等式$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 0\\ \cos\dfrac{x-y}{2}\leq 0\end{cases}$　の解

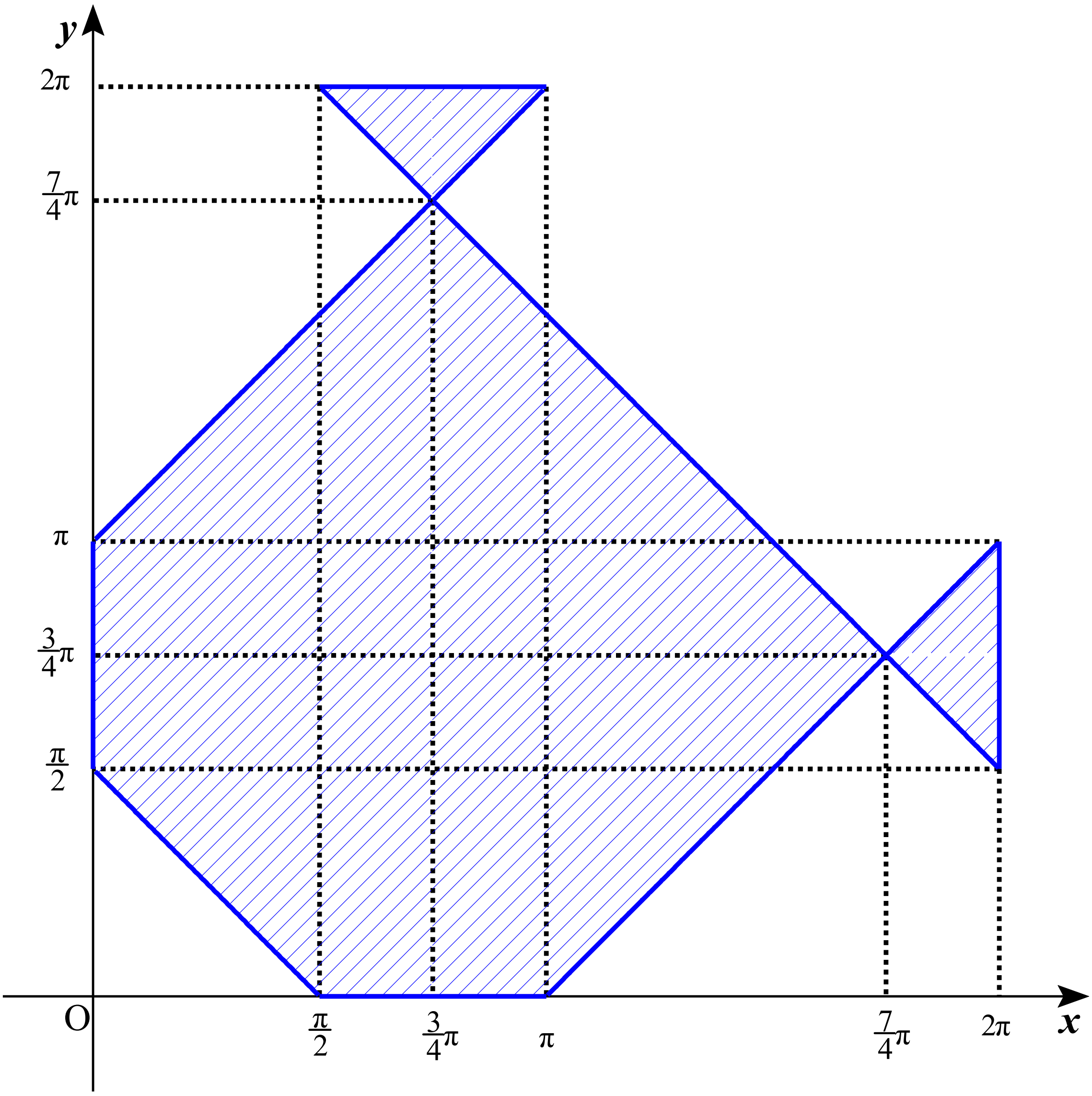
$\left(-\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{\pi}{4}\leq 0\right.$　または　$\left.\pi\leq\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{7}{4}\pi\right)$ かつ

$\left(-\pi\leq\dfrac{x-y}{2}\leq-\dfrac{\pi}{2}\right.$ または $\left.\dfrac{\pi}{2}\leq\dfrac{x-y}{2}\leq\pi\right)$

すなわち，$\left(-x\leq y\leq -x+\dfrac{\pi}{2}\right.$　または $\left.-x+\dfrac{5}{2}\pi\leq y\leq -x+4\pi\right)$ かつ

$(x+\pi\leq y\leq x+2\pi$　　または　$x-2\pi\leq y\leq x-\pi)$　・・・②

よって，①または②の表す領域は下図斜線部（境界線を含む）



253

(1)

解法 1

直線 OA，OB に関して点 C と対称な点をそれぞれ $\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$ とすると，
それぞれの直線は線分 $\mathrm{CC_1}$，$\mathrm{CC_2}$ の垂直二等分線だから，

$\mathrm{CP+PQ+QC=C_1P+PQ+QC_2 \geq C_1C_2}$　・・・①

また，$\Delta \mathrm{C_1OC_2}$ に余弦定理を適用すると，$\mathrm{C_1C_2=\sqrt{OC_1{}^2+OC_2{}^2-2OC_1\cdot OC_2\cos\angle C_1OC_2}}$

これと，$\mathrm{C_1O=C_2O}=r$

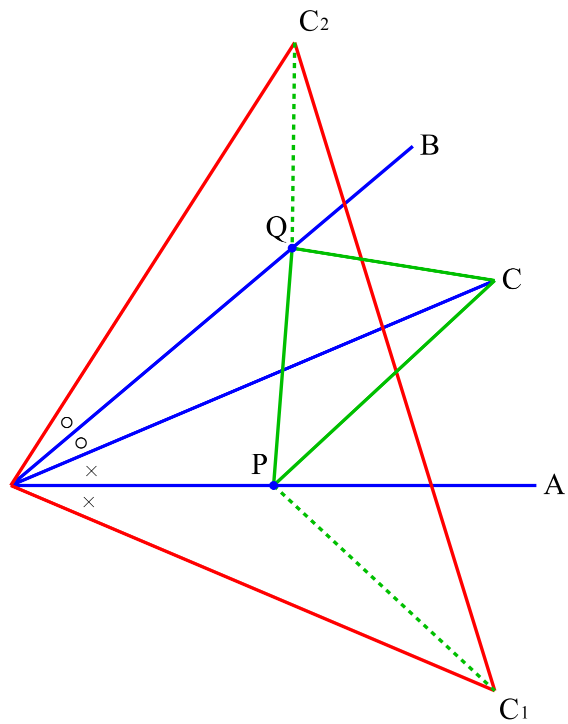
$\mathrm{\angle C_1OC_2=\angle C_1OA+\angle AOB+\angle C_2OB=\angle COA+\angle AOB+\angle COB=2\angle AOB}=2\theta$

より，

$$\begin{aligned}\mathrm{C_1C_2}&=\mathrm{\sqrt{OC_1{}^2+OC_2{}^2-2OC_1\cdot OC_2\cos\angle C_1OC_2}}\\&=\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cos 2\theta}\\&=\sqrt{2r^2(1-\cos 2\theta)}\\&=\sqrt{4r^2\sin^2\theta}\end{aligned}$$

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{C_1C_2}=2r\sin\theta$　・・・②

①，②より，$\mathrm{CP+PQ+QC}$ の最小値は $2r\sin\theta$



解法 2

xy 平面上に，点 O を原点，$\mathrm{A}(r,\ 0)$，$\mathrm{B}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，$\mathrm{C}(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$（$0<\alpha\leq\theta$）

直線 OA，OB に関して点 C と対称な点をそれぞれ$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$とすると，

それぞれの直線は線分$\mathrm{CC_1}$，$\mathrm{CC_2}$の垂直二等分線だから，

$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}=\mathrm{C_1P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC_2}\geq\mathrm{C_1C_2}$ ・・・①

また，$\angle\mathrm{AOC_1}=-\alpha$，$\angle\mathrm{AOC_2}=2\theta-\alpha$ $\left(\because \dfrac{\angle\mathrm{AOC}+\angle\mathrm{AOC_2}}{2}=\angle\mathrm{AOB}\right)$

より，$\mathrm{C_1}(r\cos\alpha,\ -r\sin\alpha)$，$\mathrm{C_2}(r\cos(2\theta-\alpha),\ r\sin(2\theta-\alpha))$

よって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C_1C_2}&=\sqrt{\{r\cos(2\theta-\alpha)-r\cos\alpha\}^2+\{r\sin(2\theta-\alpha)+r\sin\alpha\}^2}\\
&=\sqrt{2r^2[1-\{\cos(2\theta-\alpha)\cos\alpha-\sin(2\theta-\alpha)\sin\alpha\}]}\\
&=\sqrt{2r^2(1-\cos2\theta)}\\
&=\sqrt{4r^2\sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{C_1C_2}=2r\sin\theta$ ・・・②

①，②より，$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$ の最小値は$2r\sin\theta$

(2)

直線 OA，OB に関して点 D と対称な点をそれぞれ$\mathrm{D_1}$，$\mathrm{D_2}$とすると，

(1)と同様にして，$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}\geq\mathrm{D_1D_2}=2a\sin\theta$

よって，$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値は$2a\sin\theta$

(3)

O から線分 AB に下ろした垂線の足を H とすると，$a\geq\mathrm{OH}$

また，△OAB が OA＝OB の二等辺三角形であることから，

二等辺三角形の性質より，$\mathrm{OH}=r\cos\dfrac{\theta}{2}$ $\therefore a\geq r\cos\dfrac{\theta}{2}$

これと(2)より，求める最小値は$2r\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\theta$

254

解法 1

(1)

$\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$ において，

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$ より，

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-(\sin\theta-\cos\theta)^2}{2}$

よって，与式は $\cos\theta-\sin\theta=a\cdot\dfrac{1-(\sin\theta-\cos\theta)^2}{2}$ と変形できる。

さらに，$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{a}{2}\left[1-\left\{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}^2\right]$

ここで，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$-t=\dfrac{a}{2}(1-t^2)$

この両辺を，$\dfrac{2}{a}$ 倍し，整理すると，$t^2-\dfrac{2}{a}t-1=0$

ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$ だから，$-1<t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)<1$

また，$-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$ より，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ は単調に増加することから，

$t^2-\dfrac{2}{a}t-1=0\ (-1<t<1)$ を満たす 1 つの解に対し 1 つの θ が存在する。

したがって，$t^2-\dfrac{2}{a}t-1=0\ (-1<t<1)$ を満たす解がただ 1 つ存在することを示せばよい。

ここで，$y=f(t)=t^2-\dfrac{2}{a}t-1\ (-1<t<1)$ とおくと，

$-1<t<1$ における $y=f(t)$ と t 軸との共有点の t 座標の値が $t^2-\dfrac{2}{a}t-1=0\ (-1<t<1)$ の解

であるから，この t の値の範囲において共有点がただ 1 つ存在することを示せばよい。
それには，$y=f(t)$ が t の 2 次関数であることから，$f(-1)f(1)<0$ を示せばよい。

よって，$f(-1)f(1)=\dfrac{2}{a}\cdot\left(-\dfrac{2}{a}\right)=-\dfrac{4}{a^2}$ より，$f(-1)f(1)<0$ が，すなわち題意が示せた。

(2)

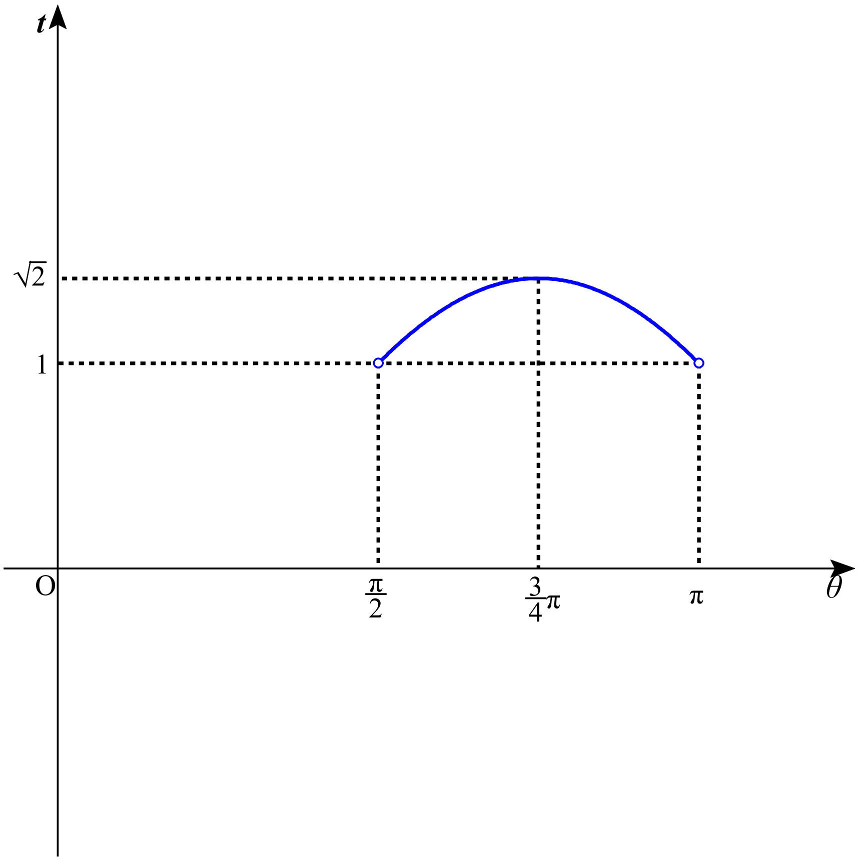
$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ は条件を満たさないから，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ の範囲で条件を満たす θ の個数を(1)と同様にして求めると，$\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ より，$1<t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{2}$

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$ は $\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ に関して対称だから，

下図より，条件を満たす θ の個数は，

$y=f(t)=t^2-\dfrac{2}{a}t-1\ \left(1<t\leq\sqrt{2}\right)$ と t 軸との共有点の t 座標が，

$1<t<\sqrt{2}$ にあれば 2 個，$t=\sqrt{2}$ であれば 1 個，$\sqrt{2}<t$ であれば 0 個である。



そこで，それぞれの条件を満たす正数 a の値の範囲を求めると，

(i) $1<t<\sqrt{2}$ のとき

$f(1)\cdot f\left(\sqrt{2}\right)<0$ より $-\dfrac{2}{a}\left(1-\dfrac{2\sqrt{2}}{a}\right)=-\dfrac{2\left(a-2\sqrt{2}\right)}{a^2}<0\qquad\therefore a>2\sqrt{2}$

(ii) $t=\sqrt{2}$ のとき

$f\left(\sqrt{2}\right)=0$ より，$1-\dfrac{2\sqrt{2}}{a}=0\qquad\therefore a=2\sqrt{2}$

(iii) $\sqrt{2} < t$ のとき

$f < 0$ より，$1 - \dfrac{2\sqrt{2}}{a} < 0$　$\therefore 0 < a < 2\sqrt{2}$

よって，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の範囲で条件を満たす θ の個数は

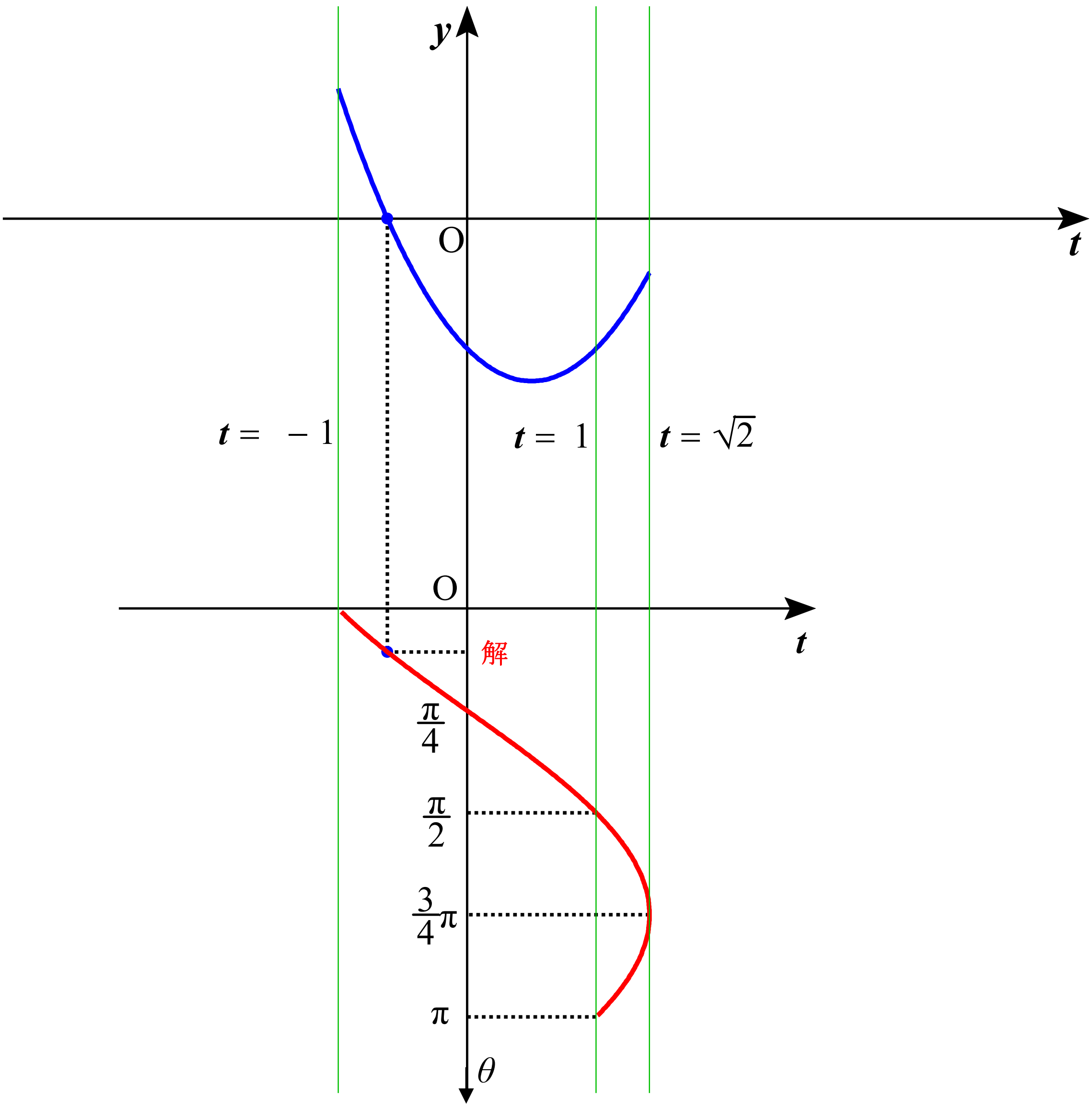
$0 < a < 2\sqrt{2}$ のとき 0 個，$a = 2\sqrt{2}$ のとき 1 個，$2\sqrt{2} < a$ のとき 2 個

これと(1)を合わせることにより，$0 < \theta < \pi$ の範囲で条件を満たす θ の個数は

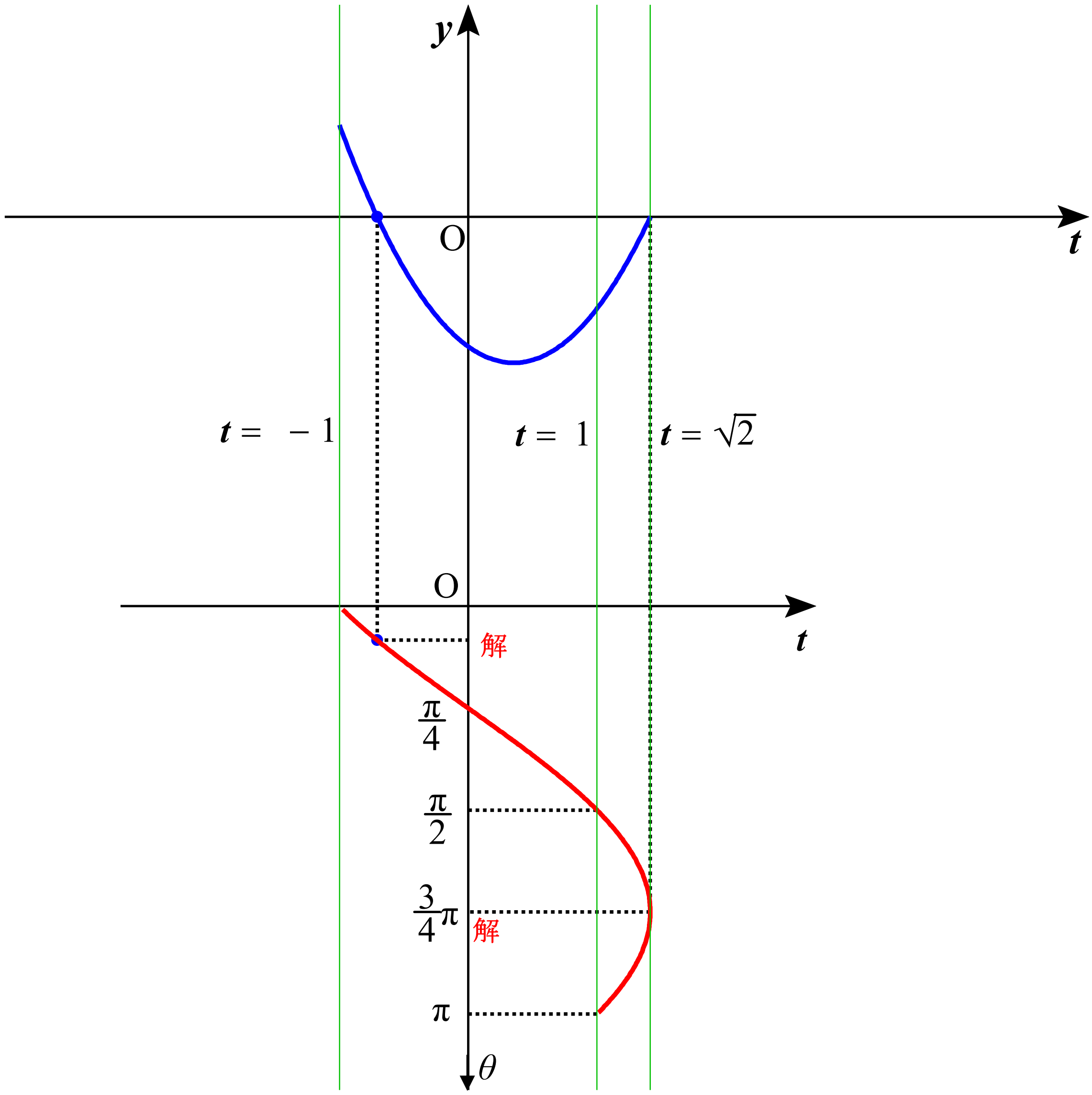
$0 < a < 2\sqrt{2}$ のとき 1 個，$a = 2\sqrt{2}$ のとき 2 個，$2\sqrt{2} < a$ のとき 3 個

参考図　青色実線：$y = f(t) = t^2 - \dfrac{2}{a}t - 1$　赤色実線：$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

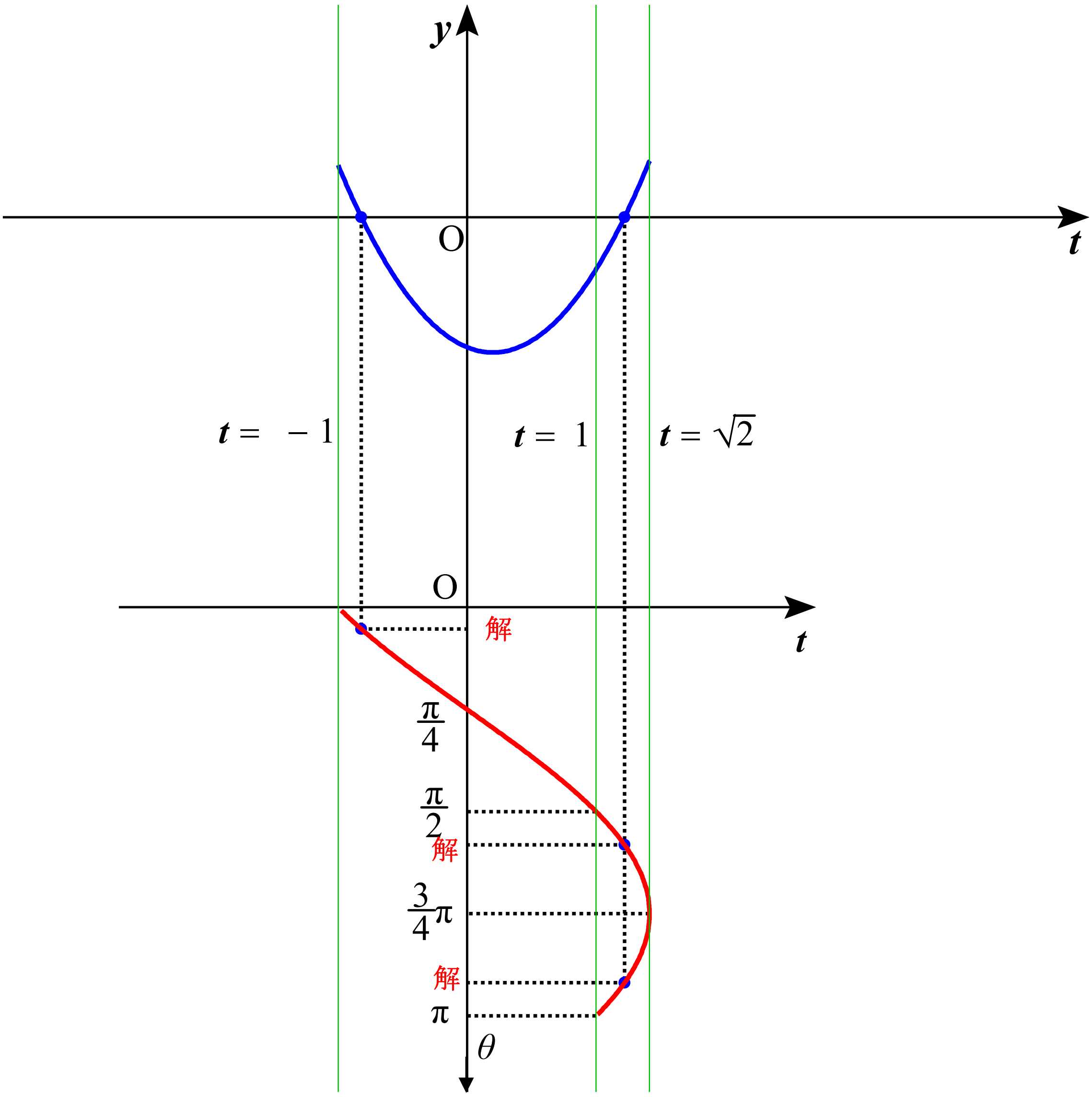
$0 < a < 2\sqrt{2}$ のとき



$a=2\sqrt{2}$ のとき



$2\sqrt{2} < a$ のとき



解法 2

(1)

$\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$ において，

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$ より，

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-(\sin\theta-\cos\theta)^2}{2}$

よって，与式は $\cos\theta-\sin\theta=a\cdot\dfrac{1-(\sin\theta-\cos\theta)^2}{2}$ と変形できる。

さらに，$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{a}{2}\left[1-\left\{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}^2\right]$

よって，$2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=a\left[\left\{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}^2-1\right]$

ここで，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$2t=a(t^2-1)$

ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$ だから，$-1<t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)<1$

また，$-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$ より，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ は単調に増加することから，

$2t=a(t^2-1)\ (-1<t<1)$ を満たす 1 つの解に対し 1 つの θ が存在する。

したがって，$2t=a(t^2-1)\ (-1<t<1)$ を満たす解がただ 1 つ存在することを示せばよい。

ここで，$y=f(t)=2t\ (-1<t<1)$，$y=g(t)=a(t^2-1)$ とおくと，

$2t=a(t^2-1)\ (-1<t<1)$ の解は $y=f(t)$ と $y=g(t)$ の $-1<t<1$ における共有点の t 座標であり，

その共有点の数は,

$f(-1)=-2$，$g(-1)=0$ より，$f(-1)<g(-1)$

$f(1)=2$，$g(1)=0$ より，$f(1)>g(1)$

$f(t)$ は 1 次関数，$g(t)$ は 2 次関数

より，ただ 1 つ存在する。

ゆえに，条件を満たす θ がただ 1 つ存在する。

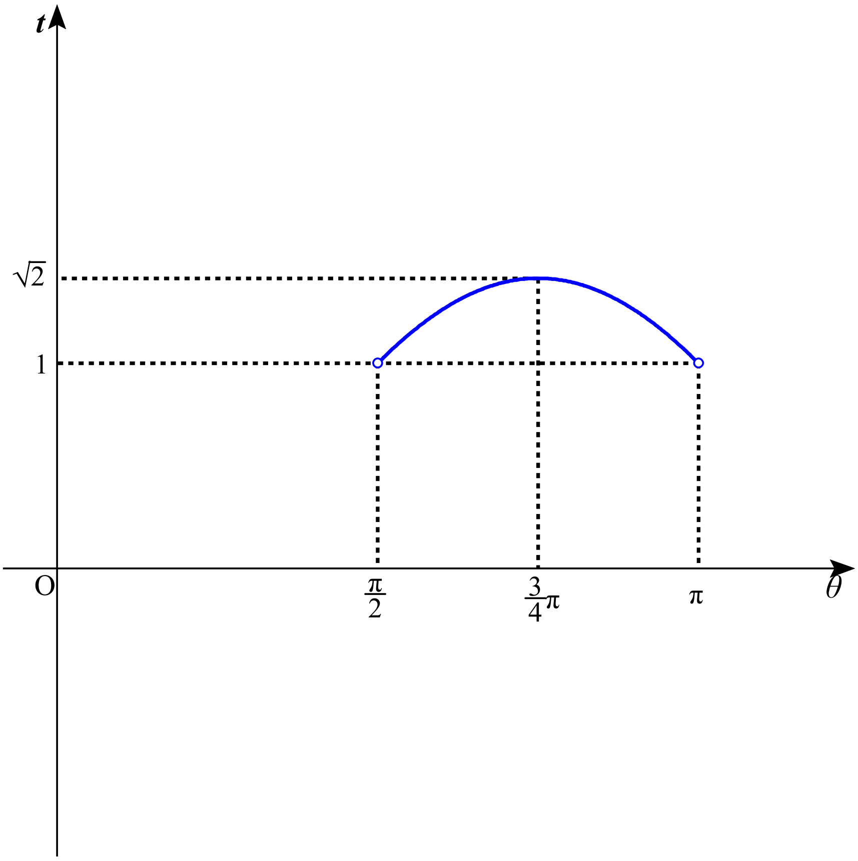
(2) 略解

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ は条件を満たさないから，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ の範囲で条件を満たす θ の個数を(1)と同様に

して求めると，$\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ より，$1<t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leq\sqrt{2}$

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$ は $\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{3}{4}\pi$ に関して対称だから，

下図より，条件を満たす θ の個数は，
$y=f(t)$ と $y=g(t)$ の $1<t\leqq\sqrt{2}$ における共有点の t 座標が，
$1<t<\sqrt{2}$ にあれば 2 個，$t=\sqrt{2}$ であれば 1 個，$\sqrt{2}<t$ であれば 0 個である。



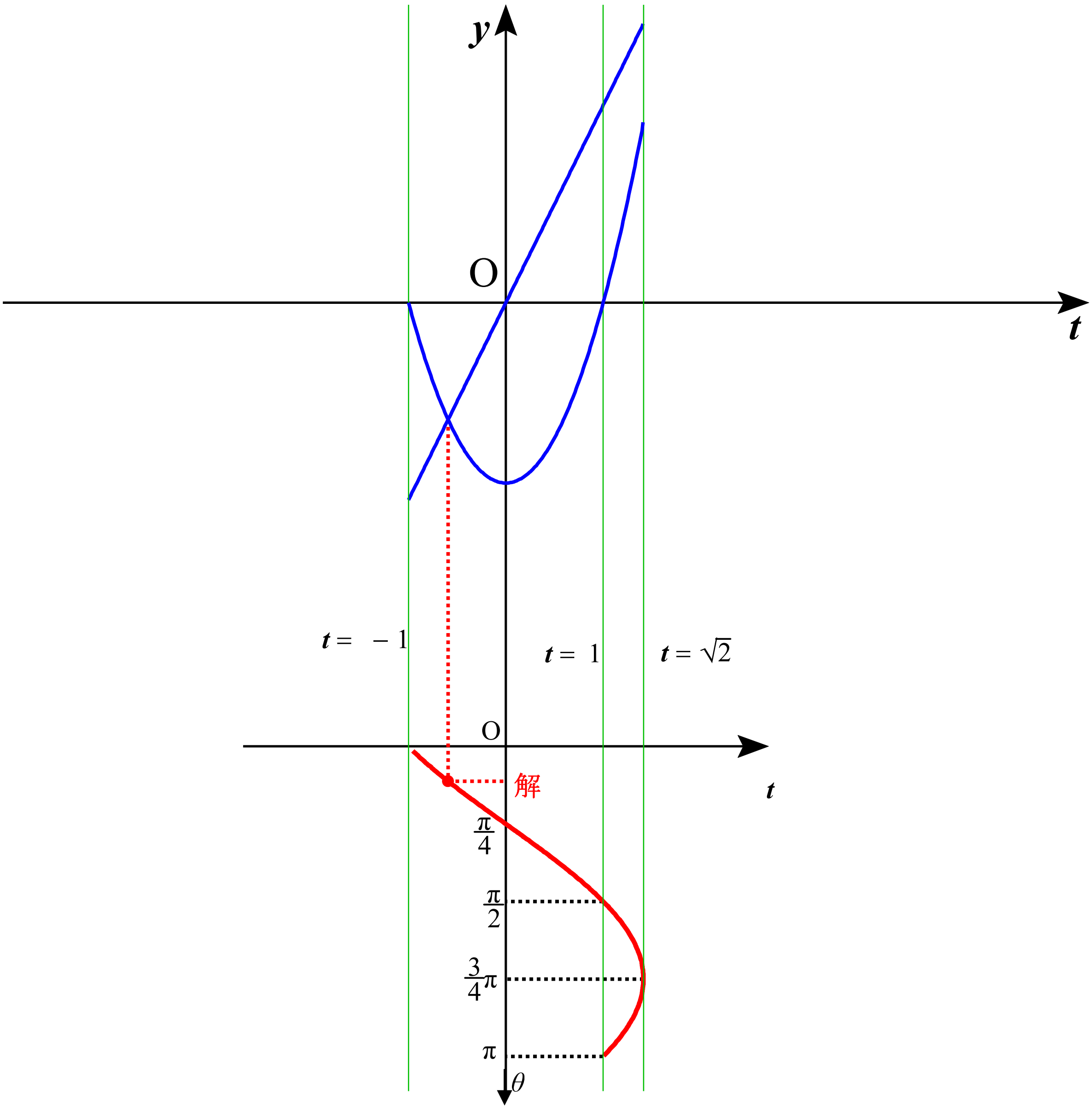
$f(1)=2$，$g(1)=0$ より，$f(1)>g(1)$ だから，共有点の t 座標の値の範囲は
$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$, $g(\sqrt{2})=a$ の大小関係で決まる。
共有点の t 座標が $1<t<\sqrt{2}$ のとき：$f(\sqrt{2})<g(\sqrt{2})$ より，$2\sqrt{2}<a$
共有点の t 座標が $t=\sqrt{2}$ のとき：$f(\sqrt{2})=g(\sqrt{2})$ より，$a=2\sqrt{2}$
共有点の t 座標が $t>\sqrt{2}$ のとき：$f(\sqrt{2})>g(\sqrt{2})$ より，$a<2\sqrt{2}$

よって，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ の範囲で条件を満たす θ の個数は

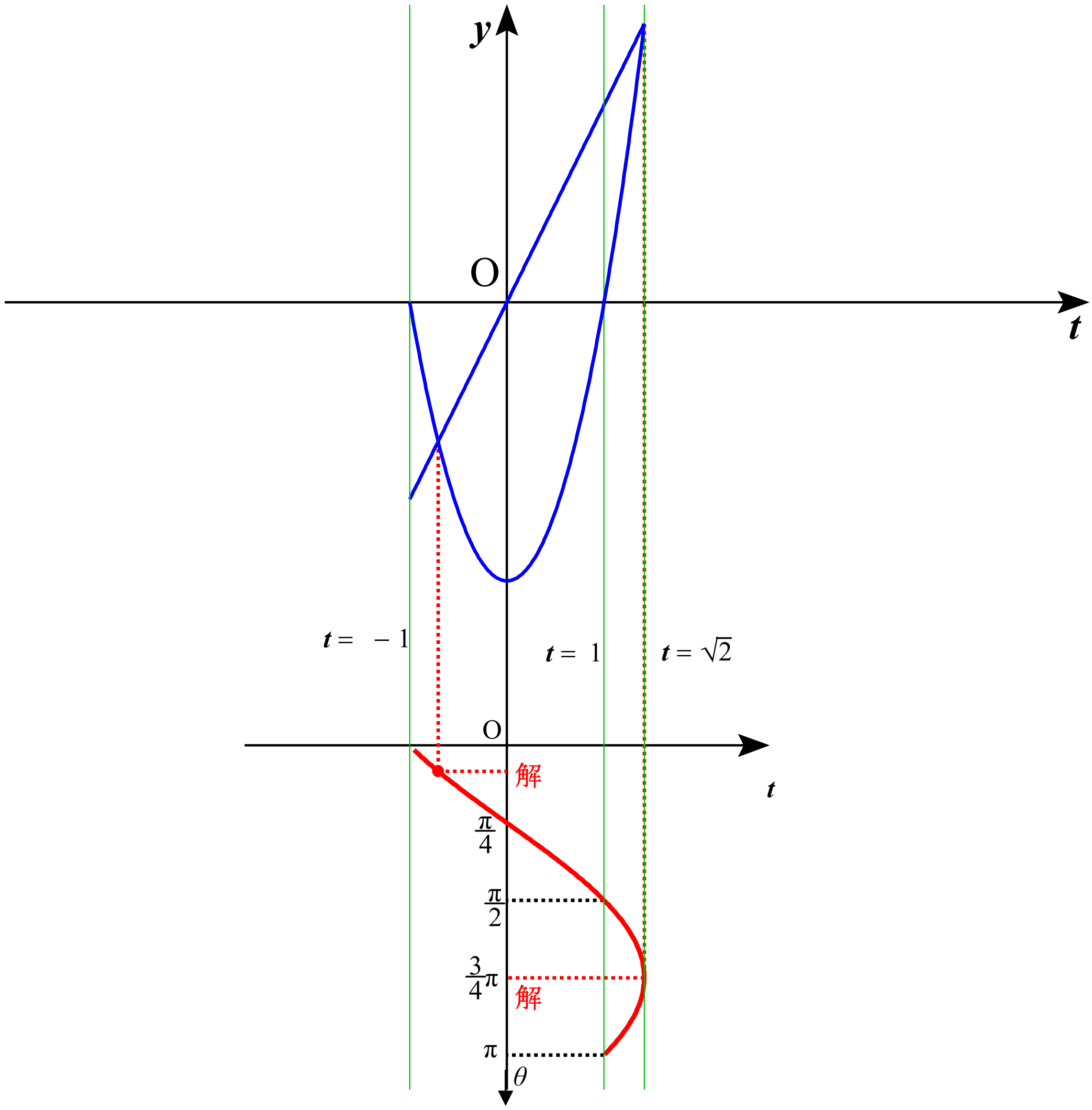
$0<a<2\sqrt{2}$ のとき 0 個，$a=2\sqrt{2}$ のとき 1 個，$2\sqrt{2}<a$ のとき 2 個
これと(1)を合わせることにより，$0<\theta<\pi$ の範囲で条件を満たす θ の個数は
$0<a<2\sqrt{2}$ のとき 1 個，$a=2\sqrt{2}$ のとき 2 個，$2\sqrt{2}<a$ のとき 3 個

参考図

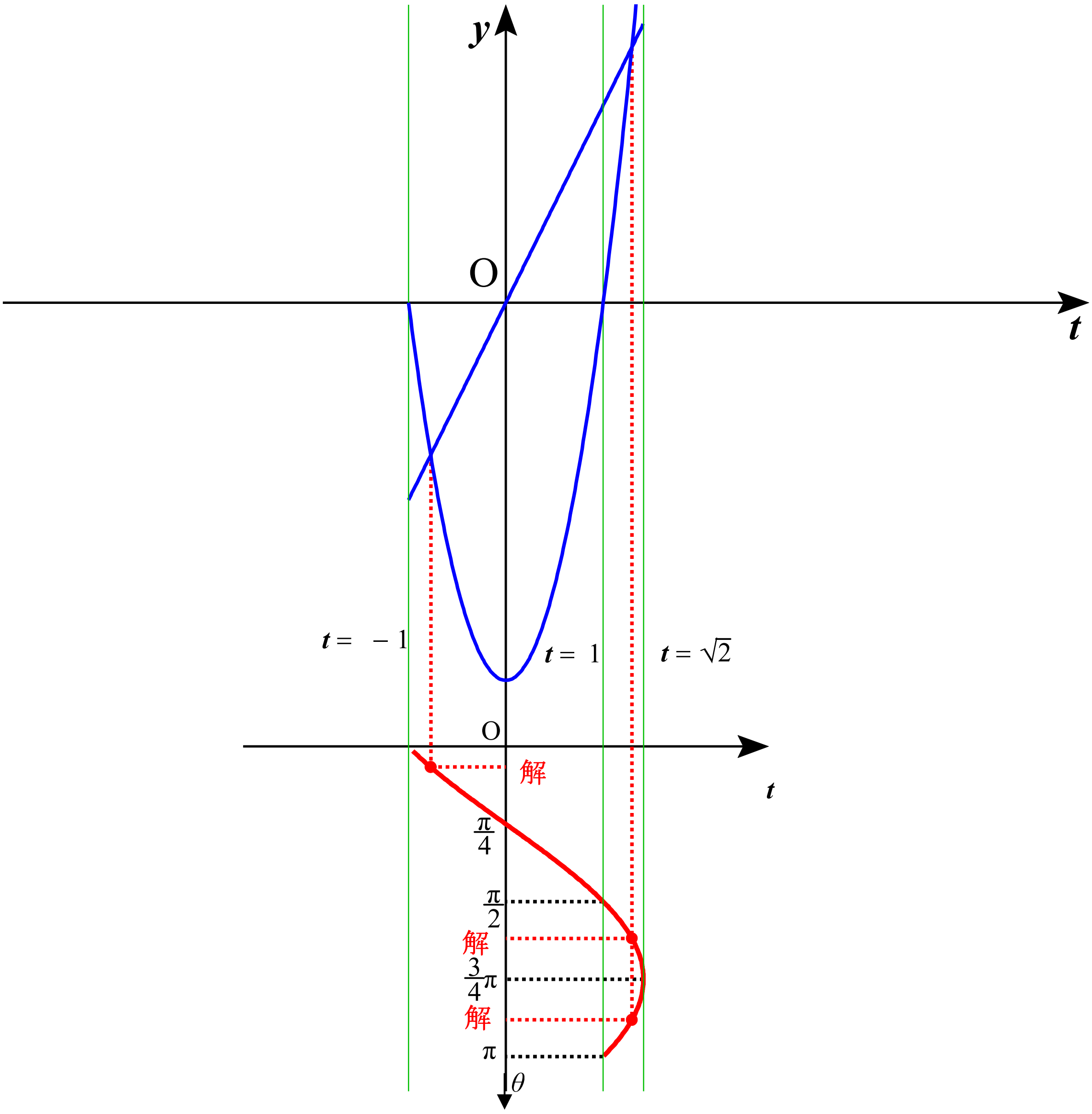
$0 < a < 2\sqrt{2}$ のとき



$a=2\sqrt{2}$ のとき



$2\sqrt{2} < a$ のとき



解法 3　数学Ⅲ

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき与式の等号が成り立たないから，$\dfrac{\pi}{2}$ は解ではない。

したがって，$0<\theta<\pi\ \left(\theta\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で考える。

すると，$\sin\theta\cos\theta\neq 0$ だから，与式の両辺を $\sin\theta\cos\theta$ で割ることにより，$\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}=a$

ここで，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}\ \left(0<\theta<\pi,\ \theta\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}=a$ の解は $y=f(\theta)$ と $y=a$ の共有点における θ の値と一致する。

そこで，$y=f(\theta)$ の概形を調べ，それをグラフに表すことにする。

$$\begin{aligned}
f'(\theta)&=\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\\
&=-\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}\\
&=-\frac{4(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)}{\sin^2 2\theta}\\
&=-\frac{4\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)}{\sin^2 2\theta}\\
&=-\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)(2-\sin 2\theta)}{\sin^2 2\theta}
\end{aligned}$$

$\sin^2 2\theta>0,\ 2-\sin 2\theta>0$ より，$f'(\theta)=0$ の解は $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ の解すなわち $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

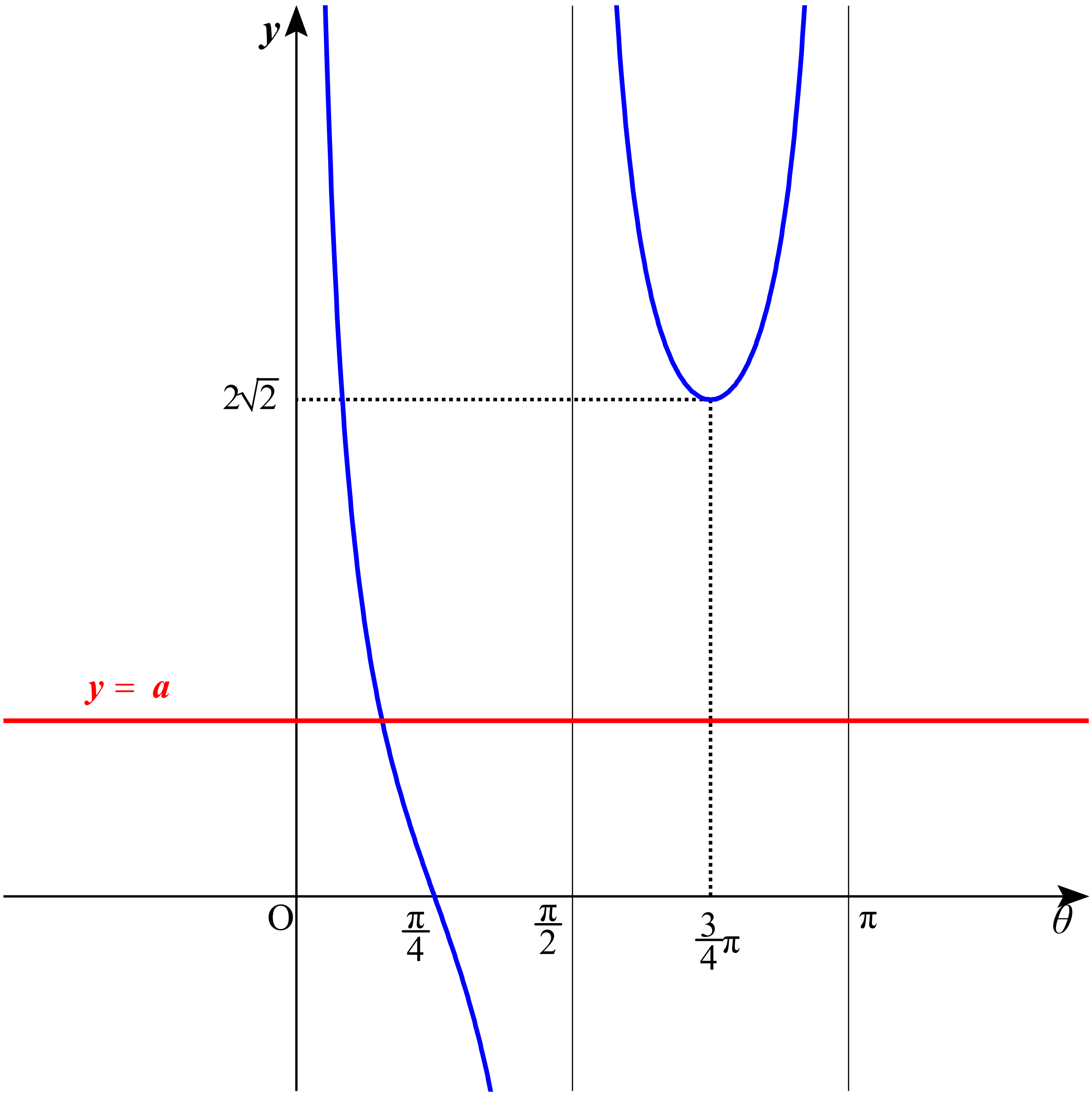
よって，$f(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$	/	$-$	/	$-$	0	$+$	/
$f(\theta)$	$+\infty$	$\downarrow$	$-\infty/+\infty$	$\downarrow$	$2\sqrt{2}$	$\uparrow$	$+\infty$

これより $y=f(\theta)$ の概形を描くと次図の青色実線のようになる。

よって，$0<\theta<\pi$ の範囲で条件を満たす θ の個数は

$0<a<2\sqrt{2}$ のとき 1 個，$a=2\sqrt{2}$ のとき 2 個，$2\sqrt{2}<a$ のとき 3 個である。


y
$2\sqrt{2}$
$y = a$
O
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$
π
θ

255

AB を直径とする円の中心$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$と直線$x-y=0$の距離は$\dfrac{\left|0-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

一方，この円の半径は$\dfrac{1}{2}$

したがって，直線$x-y=0$上の点である P はこの円の外部の点でもある。

よって，$0<\angle\mathrm{APB}<90^\circ$　・・・①

また，①より，$\angle\mathrm{APB}$が最大値をとるとき$\tan\angle\mathrm{APB}$も最大値をとる。　・・・②

直線 PA，PB とx軸正方向とのなす角を，反時計回りを正として，

それぞれα，β $\left(-90^\circ<\alpha<90^\circ,\ -90^\circ<\beta<90^\circ\right)$とすると，

$\angle\mathrm{APB}$はαとβの差の大きさで与えられる。

これと，$\alpha>\beta$より，$\angle\mathrm{APB}=\alpha-\beta$

よって，$\tan\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$　・・・③

$\tan\alpha$，$\tan\beta$はそれぞれ直線 PA，PB の傾きだから，

$\tan\alpha=\dfrac{x-1}{x}$　・・・④　　$\tan\beta=\dfrac{x-2}{x}$　・・・⑤

計算処理法 1　相加相乗平均

④，⑤を③に代入することにより，

$$
\begin{aligned}
\tan\angle\mathrm{APB}&=\frac{\frac{x-1}{x}-\frac{x-2}{x}}{1+\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-2}{x}}\\
&=\frac{x}{2x^2-3x+2}\\
&=\frac{1}{2x-3+\frac{2}{x}}\\
&=\frac{1}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3}
\end{aligned}
$$

ここで，$x>0$より，$x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$（等号成立は$x=\dfrac{1}{x}$すなわち$x=1$のとき）

よって，$\tan\angle\mathrm{APB}=\dfrac{1}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3}\leq 1$（等号成立は$x=1$のとき）

ゆえに，①，②より，$\angle\mathrm{APB}$の最大値は45°

計算処理法 2 2 次方程式の実数解条件

④，⑤を③に代入することにより，

$$\tan\angle\mathrm{APB}=\frac{\frac{x-1}{x}-\frac{x-2}{x}}{1+\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-2}{x}}$$
$$=\frac{x}{2x^2-3x+2}$$

よって， $\tan\angle\mathrm{APB}=t$ とおくと， $t=\dfrac{x}{2x^2-3x+2}$

両辺に $2x^2-3x+2$ を掛け， x について整理すると， $2tx^2-(3t+1)x+2t=0$

①より， $t\neq 0$ だから，この方程式は x の 2 次方程式である。

よって，判別式を D とすると，

$$D=(3t+1)^2-16t^2$$
$$=\{(3t+1)+4t\}\{(3t+1)-4t\},$$
$$=-(7t+1)(t-1)$$

解は実数だから， $-(7t+1)(t-1)\geq 0$ すなわち $(7t+1)(t-1)\leq 0$

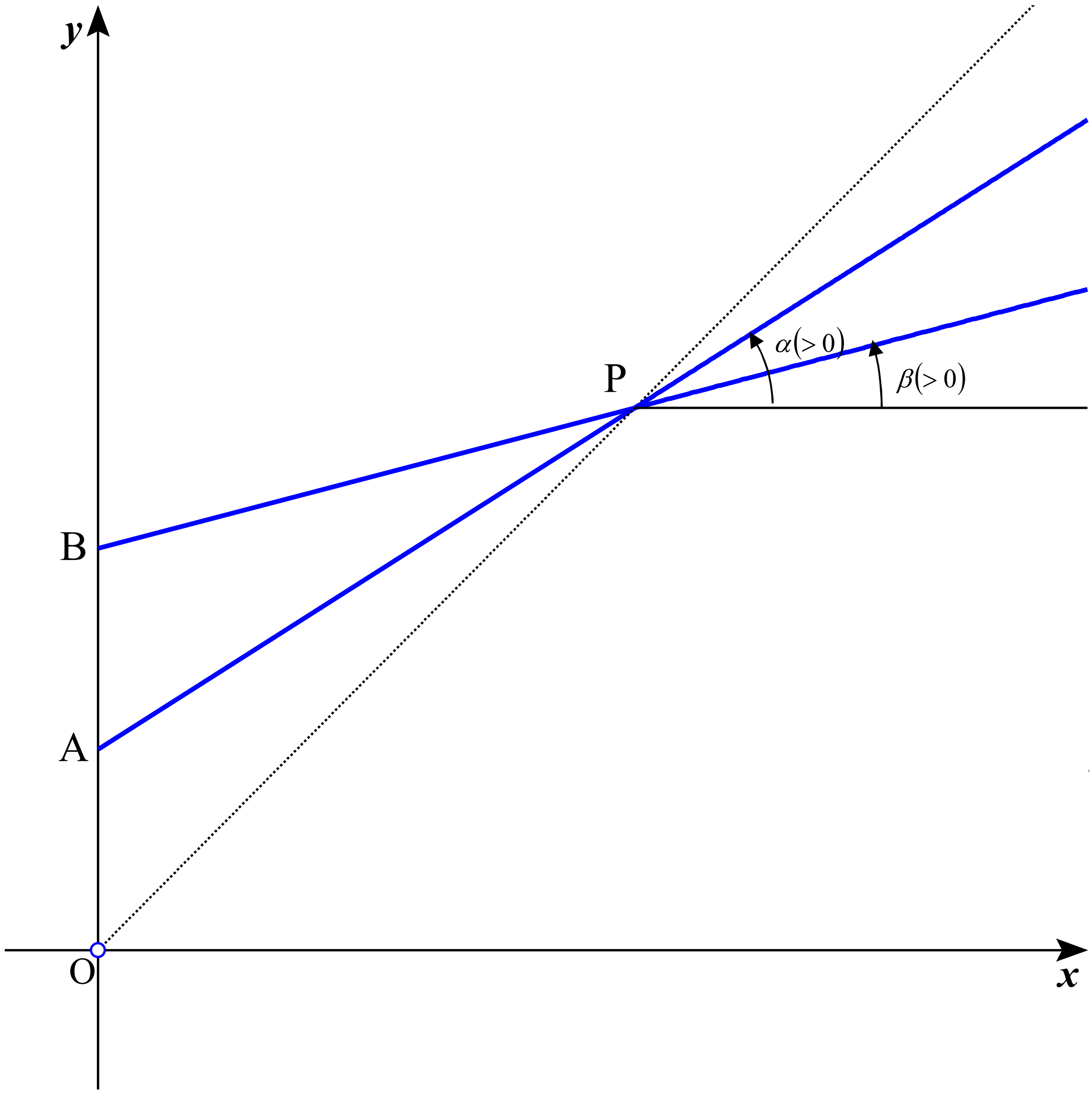
よって， $-\dfrac{1}{7}\leq t\leq 1$

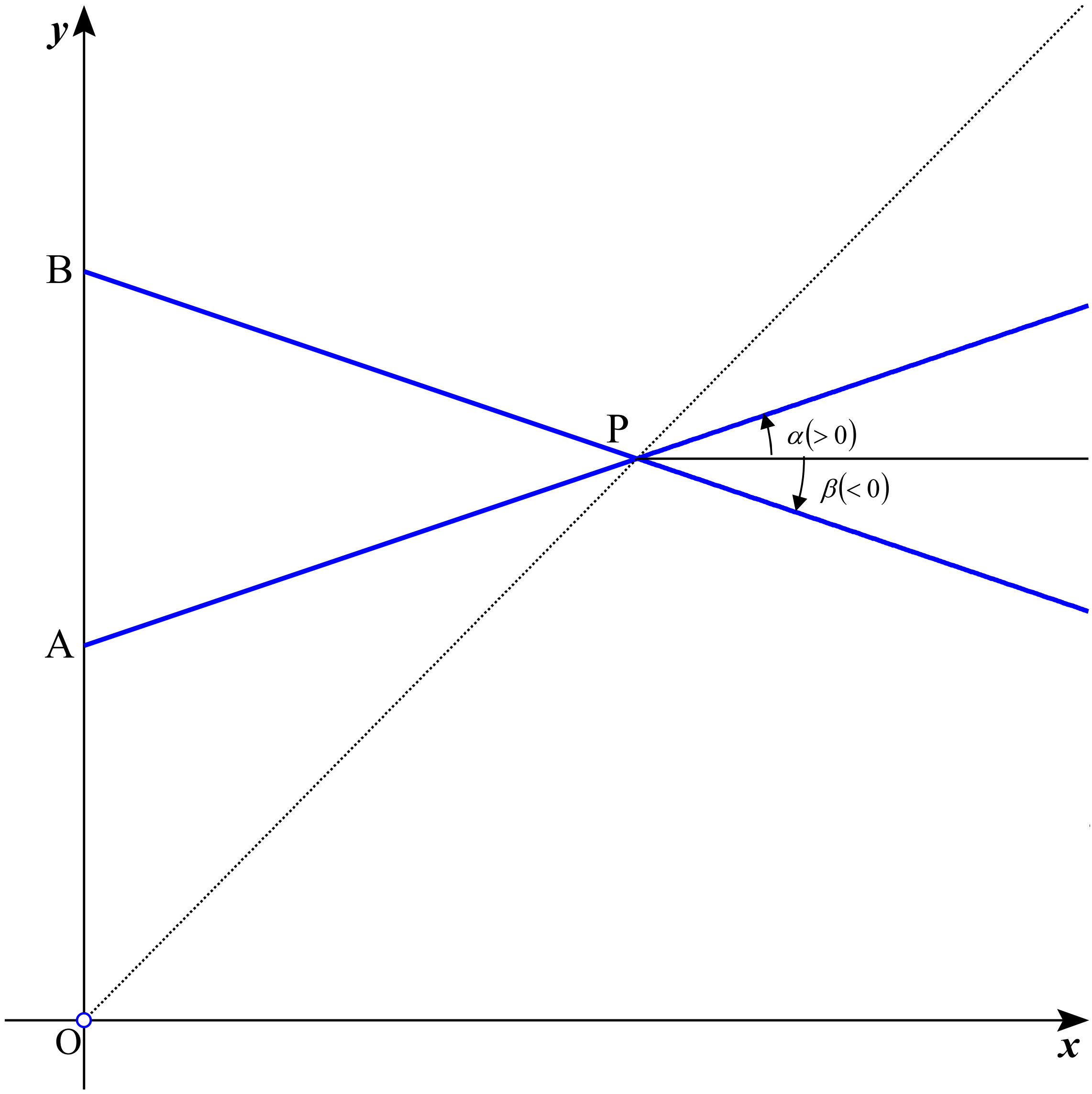
したがって， t すなわち $\tan\angle\mathrm{PAB}$ の最大値は 1 と考えられる。

そこで， $t=1$ を $2tx^2-(3t+1)x+2t=0$ に代入し整理すると， $2(x-1)^2=0$ より， $x=1$

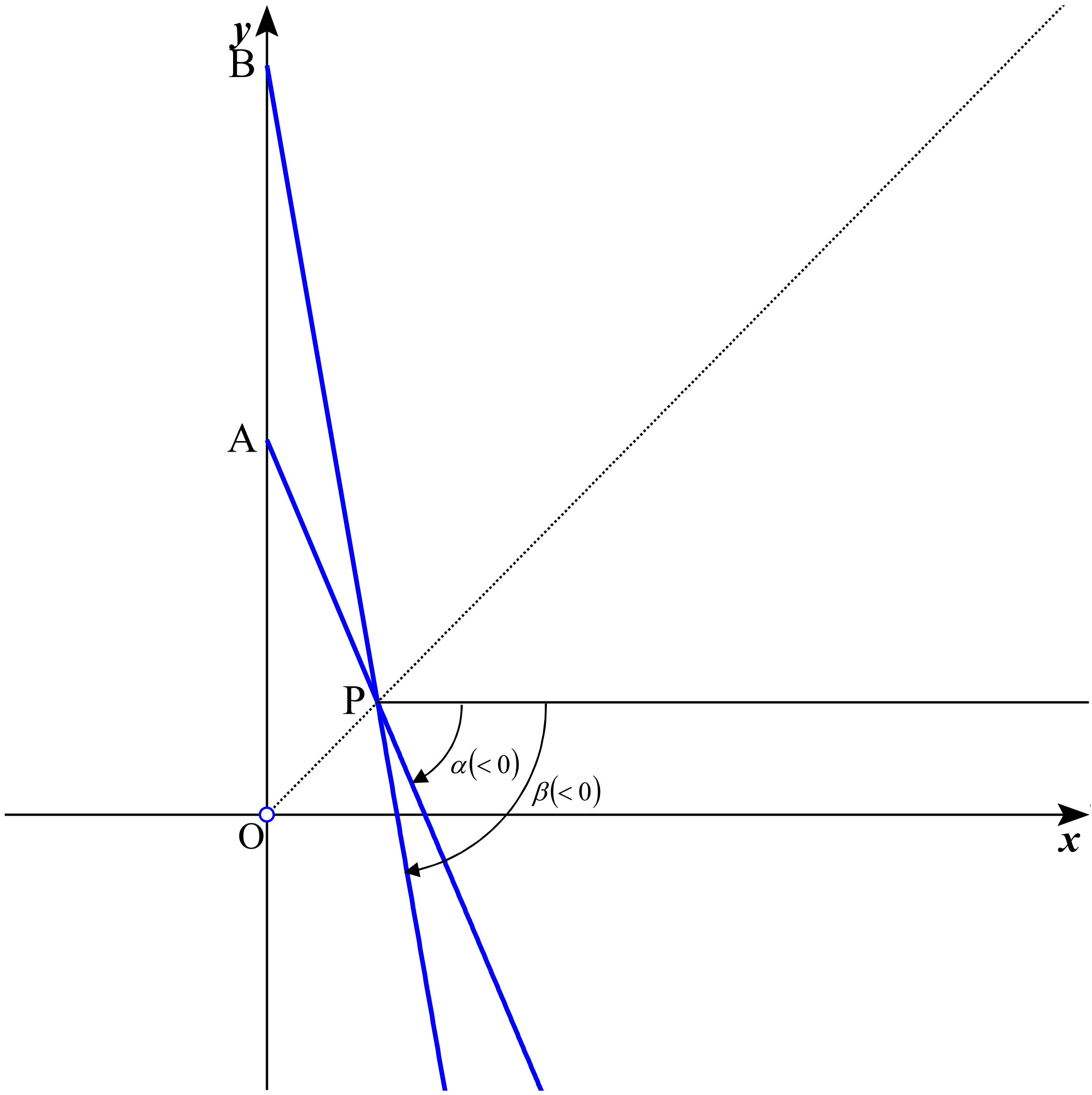
よって，点 P の座標は $(1,\ 1)$ となり，条件を満たす。

ゆえに，①，②より， $\angle\mathrm{APB}$ の最大値は 45°


y
P
$\alpha(>0)$
$\beta(>0)$
B
A
O
x



y
B
P
$\alpha(>0)$
$\beta(<0)$
A
O
x


y
B
A
P
O
x
$\alpha(<0)$
$\beta(<0)$

256

(1)

$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$

$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin B$　・・・①

正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2R$　$\therefore \mathrm{AB}=2R\sin C$　・・・②

①，②より，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$

$\mathrm{OE}=R\cos A$

$\mathrm{OE}=\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{BOE}$

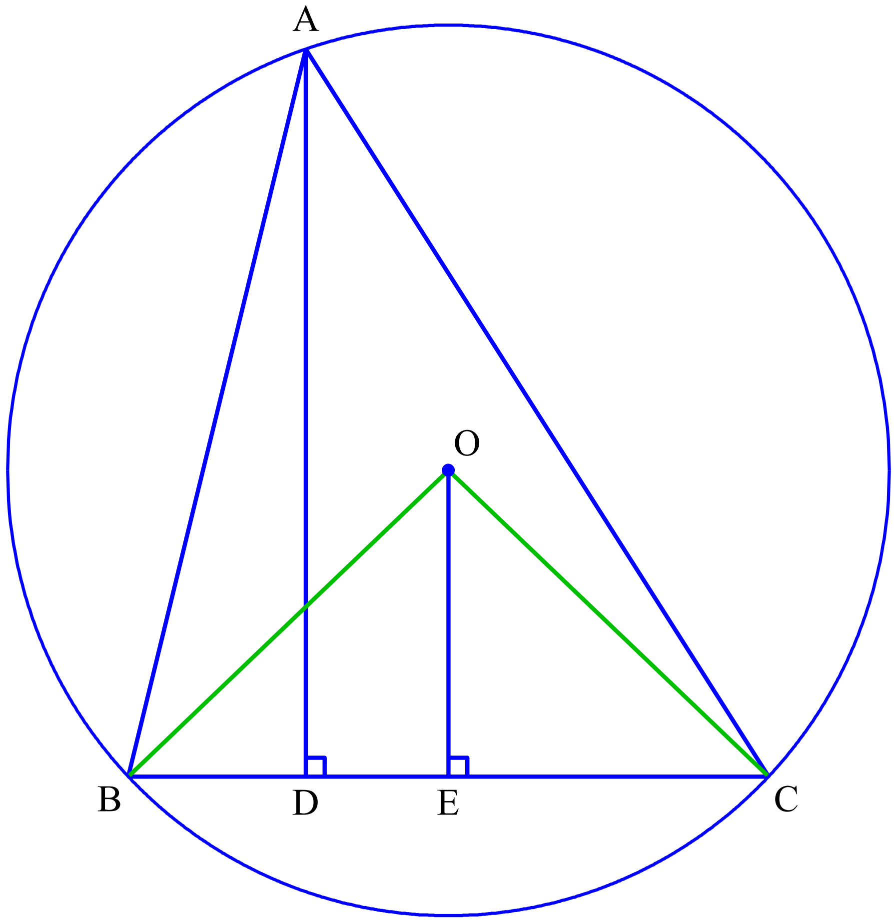
$=R\cos\angle\mathrm{BOE}$　・・・③

E は二等辺三角形 OBC の頂角 O からの垂線の足だから，二等辺三角形の性質より，

$\angle\mathrm{BOE}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}$　・・・④

同一弧の中心角と円周角の関係より，$\angle\mathrm{BOC}=2A$　・・・⑤

よって，③～⑤より，$\mathrm{OE}=R\cos A$



(2)

解法 1 平面図形

E は辺 BC の中点だから，G は線分 AE 上の点である。

また，OE は辺 BC の垂直二等分線である。

よって，G と O が一致するとき，A は辺 BC の垂直二等分線上の点となるから，AB＝AC

同様にして，BA＝BC が成り立つ。

したがって，AB＝BC＝CA が成り立つ。

ゆえに，AB＝BC＝CA が成り立つから，△ABC は正三角形である。

解法 2 ベクトル

G と O が一致するとき $\overrightarrow{\mathrm{GE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$， $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GE}}&=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}\\&=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)-\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{6}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$

より， $\overrightarrow{\mathrm{GE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{6}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(-\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{6}\left(-\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{GE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ だから， $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$

よって，AB＝AC

同様にして，BA＝BC が成り立つ。

ゆえに，AB＝BC＝CA が成り立つから，△ABC は正三角形である。

(3)

AD＝3OE の証明

OG と AD の交点を F とすると，OF//BC より，AF：FD＝AG：GE＝2：1

よって，$\therefore \mathrm{AD}=\frac{3}{2}\mathrm{AG}$ ・・・⑥

△AGF と△EGO について，

OF//BC より， $\angle\mathrm{AFO}=\angle\mathrm{EOG}=90^\circ$ ・・・⑦

$\angle\mathrm{AGF}=\angle\mathrm{EGO}$ （対頂角） ・・・⑧

AG：EG＝2：1 ・・・⑨

⑦～⑨より，△AGF と△EGO は相似で相似比が 2：1 である。

よって，AG：EO＝2：1 $\therefore \mathrm{AG}=2\mathrm{OE}$ ・・・⑩

ゆえに，⑨，⑩より，AD＝3OE

$\tan B \tan C = 3$ の証明

(1)より，

$\mathrm{AD} = 2R \sin B \sin C$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OE} &= R\cos A \\
&= R\cos\left(180^\circ - (B + C)\right) \\
&= -R\cos(B + C) \\
&= -R(\cos B \cos C - \sin B \sin C) \\
&= R(\sin B \sin C - \cos B \cos C)
\end{aligned}
$$

よって，$\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{2\sin B \sin C} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\tan B \tan C}\right)$

(2)より，AD＝3OE だから，$\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{3}$

よって，$\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\tan B \tan C}\right) = \dfrac{1}{3}$　　$\therefore \tan B \tan C = 3$